I. S. F. A. 2005-2006

Concours d'Entrée

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Calculatrice interdite

PROBLEME I

Soit $C_0(R^+)$ l'ensemble des fonctions définies sur R^+, continues, à valeurs réelles. Pour $f \in C_0(R^+)$ on note F la primitive de f qui s'annule en 0.

Soit E le sous-ensemble des fonctions f de $C_0(R^+)$ telles que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2} dt$ soit convergente.

Pour $f \in E$ on note $I(f)$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2} dt$.

A- Etude de quelques propriétés de l'application $f \to I(f)$:

1°- Déterminer les fonctions f de E positives et telles que $I(f)=0$.

2°- Soit f une fonction de $C_0(R^+)$ positive.

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t} dt$ est convergente si et seulement si $f \in E$

Indication : On pourra montrer et utiliser la relation :

Pour $A>0$ $\int_0^{A} \frac{F(t)}{(1+t)^2} dt = -\frac{F(A)}{1+A} + \int_0^{A} \frac{f(t)}{1+t} dt$.

3°- Donner un exemple de fonction f (nécessairement de signe non constant) appartenant à E et telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t} dt$ diverge.

4°- Pour $f \in E$ montrer, en justifiant l'existence de l'intégrale, la relation :

$$I(f) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{F(t)+F(1/t)}{(1+t)^2} dt .$$

B- L'objet de cette partie est le calcul de l'intégrale $I(f)$ pour une fonction f particulière

Préliminaire :

On note J et K les intégrales $\int_0^{1} \frac{\ln(t)}{1+t} dt$ et $\int_0^{1} \frac{-\ln(1+t)}{t} dt$.

a°- Montrer que les intégrales J et K convergent.

b°- Montrer l'égalité des intégrales J et K.

c°- Montrer que la valeur commune à J et à K est égale à $-\pi^2/12$.

Indication : On pourra utiliser la relation : $1-u+\ldots+(-u)^n = \frac{1-(-u)^{n+1}}{1+u}$. *On rappelle également que la série de terme général* $v_n = \frac{1}{n^2}; n \ge 1$ *a pour somme* $\pi^2/6$.

Soit f la fonction de R^+ dans R définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{ln(1+x)}{x} & \text{pour } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

1°- (i) Montrer que $f \in E$.

(ii) Montrer que $F(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$?

2°- Montrer que $I(f) = (1/4)\int_0^{+\infty} \left[\dfrac{ln(t)}{1+t}\right]^2 dt - K$.

Indication : On pourra calculer $f(x) - \dfrac{1}{x^2} f(\dfrac{1}{x})$ *et en déduire* $F(x)+F(1/x)$ *.*

3°- Exprimer J en fonction de l'intégrale $\int_0^1 \left[\dfrac{ln(t)}{1+t}\right]^2 dt$. En déduire $I(f)$.

PROBLEME II

Soit $(u_1, u_2, ..., u_n)$ un n-uplet de R^n.

Ce problème a pour objet la recherche des n-uplets $(y_1, y_2, ..., y_n)$ tels que à la fois le n-uplet $(u_1, u_2, ..., u_n)$ ne soit pas « très différent » des n-uplets $(y_1, y_2, ..., y_n)$ mais aussi que les suites finies $i \to y_i$; $i = 1,..,n$ soient suffisamment « lisses ».

1°- Soit Δ_n la matrice de terme général $\delta_{i,j}$ défini par :

$$\begin{cases} \delta_{i,i} = 1 \;\; ; i \in [1,..,n-1] \\ \delta_{i,i+1} = -1 \;\; ; i \in [1,..,n-1] \\ \delta_{i,j} = 0 \;\; ; i \in [1,..,n-1] \; ; \; \mathrm{j} \in [1,..,n] \;\; j \neq i \; j \neq i+1 \end{cases}$$

On note Γ_n la matrice $\Delta_{n-1} \times \Delta_n$.

Déterminer le noyau de l'application linéaire de R^n dans R^{n-1} (respectivement de R^n dans R^{n-2}) associée à la matrice Δ_n (respectivement Γ_n).

2°- A tout n-uplet $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de R^n on associe la matrice colonne à n lignes de $i^{ème}$ ligne x_i . On note X cette matrice. $\|X\|_n^2 = \sum_{i=1,..,n} x_i^2$ désigne la norme euclidienne du n-uplet $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Pour j égal à 1 ou 2 on note φ_j l'application de R^n dans R définie par :

$$\varphi_j(y_1, ..., y_n) = h(y_1, ..., y_n) + k_j(y_1, ..., y_n)$$

avec :

$$\begin{cases} h(y_1, ..., y_n) = \|Y - U\|_n^2 \\ k_1(y_1, ..., y_n) = \|\Delta_n \times Y\|_{n-1}^2 \\ k_2(y_1, ..., y_n) = \|\Gamma_n \times Y\|_{n-2}^2 \end{cases}$$

Déterminer le n-uplet de R^n $(y_1,..,y_n)$ qui minimise la fonction h. Par rapport à l'objectif défini la fonction h est dite fonction de fidélité. Justifier cette terminologie. Donner également l'ensemble des n-uplets qui minimisent la fonction k_1 (respectivement k_2). Les fonctions k_1 et k_2 sont dites fonctions de régularité. Justifier aussi cette terminologie.

3°- Montrer que la fonction φ_1 (respectivement φ_2) admet au moins un minimum et qu'en ce(s) minimum(s) la différentielle est nulle.

4°- Montrer que pour les matrices colonnes Y associées aux n-uplets minimisant φ_1 sont solutions de l'équation : $Y - U + {}^t\Delta_n \times \Delta_n \times Y = 0$.

Déduire en fonction de Δ_n (respectivement Γ_n) les solutions (matrices colonnes) qui minimisent φ_1 (respectivement φ_2).

5°- Pour n égal à 3 et $u_1=1$ $u_2=2$ $u_3=5$ donner les solutions.

PROBLEME III

1°- On définit la suite réelle $\{z_n, n \in N\}$ par son premier terme z_0 et par la relation de récurrence $z_{n+1} = z_n^2 / 2; n \geq 0$.

Etudier, en fonction du premier terme z_0 la variation de la suite $\{z_n, n \in N\}$ et en déduire ses propriétés de convergence.

2°- On définit la suite $\{U_n = (x_n, y_n), n \in N\}$ à valeurs dans R^2 par son premier terme $U_0 = (x_0, y_0)$ et par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + y_n^2}{2} \\ y_{n+1} = x_n y_n \end{cases}$$

(i) Donner les points limites possibles pour la suite $\{U_n, n \in N\}$ (On rappelle que la suite $\{U_n = (x_n, y_n), n \in N\}$ est dite convergente si les suites réelles $\{x_n, n \in N\}$ et $\{y_n, n \in N\}$ convergent).

(ii) Si $L = (l, l')$ désigne un point limite possible on note E_L l'ensemble des couples (x_0, y_0) tels que la suite $\{U_n, n \in N\}$ converge vers L. Déterminer pour chaque point L limite possible l'ensemble E_L.

Indication : On pourra introduire les suites s_n et d_n égales respectivement à x_n+y_n et x_n-y_n et utiliser les résultats de la première question.

3°- On suppose que le point (x_0, y_0) n'appartient à aucun des ensembles E_L . Etudier le comportement asymptotique des suites $\{x_n, n \in N\}$ et $\{y_n, n \in N\}$.
